中国理论数学前沿
Frontiers of Chinese Pure Mathematics
2023 年第 01 卷第 01 期
Vol. 01, No. 01, 2023

研究性论文 http://www.scifootprint.com/FCPM/index.html

集值向量优化问题 E-超有效解的非线性标量化刻画

罗凤雅，李　飞*

（内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021）

摘要：在向量优化问题研究中，基于序锥定义的（弱）有效解的概念及其性质具有十分重要的作用。超有效解的概念是对已有的几种真有效解的概念的统一，而基于改进集而提出的向量优化问题的 E-超有效解是对经典的超有效解概念的重要推广，它统一了超有效性和 ε-超有效性的概念。因此，研究 E-超有效解及其相关性质对研究向量优化问题具有十分重要的意义。本文主要对 E-超有效解非线性标量化的相关条件进行研究：首先通过半范数 p 的相应性质得到集值向量优化问题的 E-超有效解非线性标量化的一个充要条件；其次利用距离函数 d 的相关性质得到 E-超有效解非线性标量化的另一个充要条件；再次根据 E-最优解与 E-超有效解之间的关系，在 $E=E+K_0$ 的条件下通过基于改进集 E 的面向距离函数 Δ_{-E} 得出 E-超有效解非线性标量化结果的一个充分条件；最后，在 $\boldsymbol{0}\in \mathrm{cl}E$ 的条件下利用面向距离函数 Δ_{-E} 得出 E-超有效解非线性标量化结果的一个必要条件，并推导出相应的充要结果。

关键词：集值向量优化；改进集；E-超有效解；非线性标量化；半范数；面向距离函数

DOI：10.48014/fcpm.20230420001

引用格式：罗凤雅，李飞．集值向量优化问题 E-超有效解的非线性标量化刻画[J]．中国理论数学前沿，2023，1(1)：14-20.

0　引言

向量优化问题的相关研究在运筹与优化领域扮演着十分重要的角色。在向量优化问题求解中，在序锥上定义的（弱）有效解及其相关性质对向量优化问题的求解过程尤为重要。然而，有效解都是关于某种偏序的非劣意义下的解，其中的一些解的性质比较差，因而人们一直寻找具有更好特征的有效解——真有效解。到目前为止，相关学者已经提出了各种形式真有效解的概念，例如 Benson 真有效解、Henig 真有效解、超有效解、严有效解、强有效解、Borwein 真有效解等。其中，1991 年 Borwein 等在文献[1]中首次提出的超有效解统一了已有的几种真有效解的概念。之后更多学者相继得到了超有效解的各种性质（见文献[2-7]）。2003 年邵建英在文献[8]中首次引进了 ε-超有效解。2011 年 Chicco 在文献[9]中提出改进集的概念并在此基础上定义了 E-最优点，从而扩展了向量优化问题真有效解的范围。改进集是研究向量优化问题精确与近似解及其性质的重要工具，它在统一框架下对各类解进行研究推广，很多学者在此基础上得到了更多基于改进集定义的真有效解及相关性质（见文献[10-11]）。2016 年周志昂等人在文献[12]中首次提出针对集值向量优化问题的 E-超有效解，它的提出统一并推广了超有效解和 ε-超有效解。随后，林安于 2018 年在文献[13]中得到了 E-超有效解的最优性条件。2022 年白霞等在文献[14]中利用基于改进集 E 的 Gerstewitz 泛函及面向距离函数

* 通讯作者　**Corresponding author：**李飞，lif@imu.edu.cn

收稿日期：2023-04-23；　**录用日期：**2023-05-18；　**发表日期：**2023-06-28

基金项目：国家自然科学基金项目（No. 11601248）资助

Δ_{-E} 推导出包含 E -超有效解在内的几类真有效解关于非线性标量化刻画的相关结果。2003 年 ZAFFARONI 在文献[15]中利用基于锥 K 的面向距离函数 Δ_{-K} 对超有效解进行非线性标量化刻画。2014 年周志昂等在文献[16]中利用半范数 p 的性质对集值向量优化问题的 ε -超有效解进行非线性标量化刻画。2013 年秦晨在文献[17]中将基于改进集 E 的 E -最优点概念推广到一般的拓扑线性空间并得到 E -最优点的相关性质。在文献[15-17]的启发下,本文首先利用半范数 p 和距离函数 d 的性质对 E -超有效解进行非线性标量化刻画。然后根据 E -最优解与 E -超有效解之间的关系,在基于改进集 E 的面向距离函数 Δ_{-E} 刻画下进一步得出 E -超有效解的非线性标量化结果。

1 预备知识

设 Y 是赋范线性空间,$\mathbf{0}$ 是空间 Y 中的零元。设 A 是 Y 中的非空集合,cone$A$ 代表集合 A 的锥包,cone$A:=\{\lambda a \mid a\in A,\lambda\geqslant 0\}$,int$A$、cl$A$、bd$A$ 和 $Y\backslash A$ 分别代表集合 A 的内部、闭包、边界和补集。若 A 是凸集且 $\mathbf{0}\notin \mathrm{cl}A$,称 A 为 cone$A$ 的基。若 $\forall a^1,a^2\in A,\lambda\in[0,1]$,有 $\lambda a^1+(1-\lambda)a^2\in A$,则称 A 是凸集。A 是均衡的当且仅当 $\forall x\in A,\lambda\in[-1,1]$,$\lambda x\in A$。$A$ 是可吸收的当且仅当 $\mathbf{0}\in \mathrm{int}A$。若 A 满足 $\lambda A\subseteq A,\lambda\geqslant 0$,则称集合 A 是锥。A 是凸锥当且仅当 $A+A\subseteq A$。A 是点锥当且仅当 $A\cap(-A)=\{\mathbf{0}\}$。$\mathbb{R}$是实数集,记$\mathbb{R}^+:=\{r\in\mathbb{R}\mid r\geqslant 0\}$。

令 K 是 Y 中的一个闭凸点锥,$K_0:=K\backslash\{\mathbf{0}\}$,$N(\mathbf{0})$是 Y 中的零邻域族。本文主要研究的集值向量优化问题如下:

$$(VP)\quad \min F(x)\quad s.t.\ x\in A,$$

其中 $F:A\rightrightarrows Y$ 是集值映射。

定义 1[9] 设 E 是 Y 中的非空集合。若 $\mathbf{0}\notin E$ 且 $E+K=E$,则称 E 是关于 K 的改进集。

定义 2[10] 设 E 是关于 K 的改进集。若 $\bar{x}\in A$,$\exists\,\bar{y}\in F(\bar{x})$使得$(F(A)-\bar{y})\cap(-E)=\varnothing$,则称 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E-最优解,(VP)所有 E-最优解构成的集合记为 $O(A,E)$。

注 1[17] $\bar{x}\in A$ 是 E-最优解当且仅当 $\exists\,\bar{y}\in F(\bar{x})$,使得 $\bar{y}-y\notin E,\forall y\in F(A)$。

定义 3[11] 设 E 是关于 K 的改进集。若 $\bar{x}\in A$,$\exists\,\bar{y}\in F(\bar{x})$使得

$$\mathrm{clcone}(F(A)+E-\bar{y}))\cap(-K)=\{0\},$$

则称 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E-Benson 真有效解,(VP)所有 E-Benson 真有效解构成的集合记为 BE(A,E)。

注 2[11] 设 E 是关于 K 的改进集,$BE(A,E)\subset O(A,E+K_0)$。

定义 4[12] 设 E 是关于 K 的改进集。$\bar{x}\in A$,$\exists\,\bar{y}\in F(\bar{x})$,若 $\forall V\in N(\mathbf{0})$,$\exists\, U\in N(\mathbf{0})$使得

$$\mathrm{cone}(F(A)+E-\bar{y})\cap(U-K)\subseteq V,$$

则称 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E-超有效解,(VP)所有 E-超有效解构成的集合记为 SE(A,E)。

注 3[12] 设 E 是关于 K 的改进集,SE$(A,E)\subset$ BE(A,E)。

定义 5[18] 令 $p:Y\to\mathbb{R}$,p 是 Y 上的一个半范数当且仅当

$$p(\lambda y)=|\lambda|p(y),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall y\in Y$$

且

$$p(y_1+y_2)\leqslant p(y_1)+p(y_2),\ \forall y_1,y_2\in Y.$$

设 A 是 Y 中的集合,面向距离函数 $\Delta_A(y)$:$Y\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$定义为

$$\Delta_A(y)=d_A(y)-d_{Y\backslash A}(y),$$

其中 $d_{\varnothing}(y)=+\infty$,$d_A(y)=\inf\limits_{z\in A}\|z-y\|$。

引理 1[17] 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集且 E 非空,那么

(1)Δ_E 是实值的;

(2)Δ_E 是 $1-Lipschitz$ 的;

(3)$\Delta_E\geqslant 0$;

(4) $\Delta_E<0$, $\forall y\in \mathrm{int}E$;$\Delta_E=0$, $\forall y\in \mathrm{bd}E$;$\Delta_E>0$,$\forall y\in \mathrm{int}Y\backslash E$;

(5)若 E 是闭的,则 $E=\{y:\Delta_E\leqslant 0\}$成立;

(6)若 E 是凸的,则 Δ_E 是凸的;

(7)若 E 是锥,则 Δ_E 是正齐次的。

给定下面数值优化问题:

$$(P_{x_0})\min\Delta_{-E}(x-x_0),x\in A,x_0\in Y.$$

引理 2[17] 若 x_0 是(P_{x_0})的一个解,$\mathbf{0}\in \mathrm{cl}E$,则 $x_0\in \mathrm{O}(A,E)$。

2 半范数下 E-超有效解的非线性标量化

定理 1 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集,$\bar{x}\in A$,

$\bar{y}\in F(\bar{x})$。若 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E-超有效解，则对于 Y 上的任意半范数 p，存在 Y 上的一个半范数 q，使得对满足 $y_1-y+\bar{y}-e\in K$ 的任意 $y_1\in Y,x\in A,y\in F(x),e\in E$，有

$$p(y-\bar{y}+e)\leqslant \alpha q(y_1)$$

成立。

证明 设 p 是 Y 上的一个半范数，取定 $\alpha>0$，令 $V:=\{y\in Y\mid p(y)\leqslant\alpha\}$。对 $h\in Y$，记

$$\bar{\lambda}:=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{|p(h)|} & p(h)\neq 0\\ \alpha & p(h)=0\end{cases}$$

$\forall\lambda\in[0,\bar{\lambda}]$，有 $\lambda h\in V$，从而 V 是可吸收的。

对任何 $x,y\in V,0<\lambda<1$，有 $p(-x)=p(x)$，且 $p(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda p(x)+(1-\lambda)p(y)$，故 V 是均衡的凸集。综上 V 是一个均衡可吸收凸集，因而 V 是一个凸的零邻域，即 $V\in N(\mathbf{0})$。

由于 $\bar{x}$ 是(VP)的 E-超有效解，则对上述 V，存在 $U\in N(\mathbf{0})$，使得

$$\operatorname{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)\subseteq V. \quad (1)$$

对 $y\in Y$，易知 $q(y):=\inf\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\{t\mid y\in tU\}$ 是 Y 上的一个半范数。对满足 $y_1-y+\bar{y}-e\in K$ 的任意 $y_1\in Y,x\in A,y\in F(x),e\in E$，存在 $k\in K$，使得

$$y_1-y+\bar{y}-e=k. \quad (2)$$

由半范数 q 的定义，$\forall\beta>0$，存在 $t_1\in\mathbb{R}^+$ 满足 $y_1\in t_1U$，且 $t_1<q(y_1)+\beta$，即 $\dfrac{1}{q(y_1)+\beta}y_1\in U$。据(2)可知 $y-\bar{y}+e=y_1-k$，再结合(1)可得

$$\frac{1}{q(y_1)+\beta}(y-\bar{y}+e)=\frac{1}{q(y_1)+\beta}(y_1-k)$$
$$=\frac{1}{q(y_1)+\beta}y_1-\frac{1}{q(y_1)+\beta}k\in U-K\subseteq V. \quad (3)$$

由 $p(y)$ 的定义有

$$p\left(\frac{1}{q(y_1)+\beta}(y-\bar{y}+e)\right)\leqslant\alpha,$$

即

$$p(y-\bar{y}+e)\leqslant\alpha(q(y_1)+\beta).$$

令 $\beta\to 0^+$ 可得

$$p(y-\bar{y}+e)\leqslant\alpha(q(y_1)).$$

结论得证。

定理 2 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集，$\alpha>0$，$\bar{x}\in A,\bar{y}\in F(\bar{x})$。若对于 Y 上的任意半范数 p，存在 Y 上的一个半范数 q，使得对满足 $y_1-y+\bar{y}-e\in K$ 的任意 $y_1\in Y,x\in A,y\in F(x),e\in E$，有 $p(y-\bar{y}+e)\leqslant\alpha q(y_1)$ 成立，则 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E-超有效解。

证明 令 $V\in N(0)$ 且 V 是凸集，从而 $V\subseteq Y$ 是一个均衡可吸收凸集，$p:Y\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$p(y)=\inf_{t\in\mathbb{R}^+}\{t\mid y\in tV\},$$

易知 p 是 Y 上的一个半范数。

对 $\alpha>0$，由假设可知，存在 Y 上的一个半范数 q，使得对满足 $y_1-y+\bar{y}-e\in K$ 的任意 $y_1\in Y$，$x\in A,y\in F(x),e\in E$，有

$$p(y-\bar{y}+e)\leqslant\alpha q(y_1)$$

成立，则对任意 $y_2\in\{y\in Y\mid p(y)<\alpha\}$，可知 $y_2\in Y$ 且 $p(y_2)<\alpha$，即 $\alpha-p(y_2)>0$。于是存在 $t_2\in\mathbb{R}^+$ 满足 $y_2\in t_2V$，使得

$$0\leqslant t_2\leqslant p(y_2)+(\alpha-p(y_2))=\alpha$$

成立，则有 $y_2\in t_2V\subseteq\alpha V$，即

$$\{y\in Y\mid p(y)<\alpha\}\subseteq\alpha V. \quad (4)$$

令 $U:=\left\{y\in Y\mid p(y)<\dfrac{1}{\alpha}\right\}$，易知 U 是 Y 上的均衡可吸收凸集，从而 $U\in N(\mathbf{0})$。

对任意 $y_3\in\operatorname{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)$，则有(ⅰ)若 $y_3=0$，则 $y_3\in V$；(ⅱ)若 $y_3\neq 0$，则 $\exists r>0,\hat{y}\in F(A),u\in U,\hat{k}\in K,e\in E$，使得

$$y_3=r(\hat{y}-\bar{y}+e)=u-\hat{k}, \quad (5)$$

于是有 $\dfrac{1}{r}u-(\hat{y}-\bar{y}-e)=\dfrac{1}{r}\hat{k}\in K$。由假设可得 $p(\hat{y}-\bar{y}+e)\leqslant\alpha q\left(\dfrac{1}{r}u\right)$，即 $p(r(\hat{y}-\bar{y}+e))\leqslant\alpha q(u)<1$。由(5)知 $p(y_3)<1$，则有

$$p(\alpha y_3)<\alpha \quad (6)$$

由(4)和(6)可得 $\alpha y_3\in\alpha V$，即 $y_3\in V$。

综上，$\operatorname{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)\subseteq V$，即 $\bar{x}$ 是(VP)的 E-超有效解。

由定理 1 和定理 2 可知下述的推论成立：

推论 1 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集，令 $\bar{x}\in A,\bar{y}\in F(\bar{x})$。若 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 E-超有效解，当且仅当对于 Y 上的任意半范数 $p,\alpha>0$，存在 Y 上的一个半范数 q，使得对满足 $y_1-y+\bar{y}-e\in K$ 的任意 $y_1\in Y,x\in A,y\in F(x),e\in E$，有 $p(y-\bar{y}+e)\leqslant\alpha q(y_1)$ 成立。

3 距离函数对 E-超有效解的非线性标量化刻画

定理 3 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集，$\bar{x}\in A$，$\bar{y}\in F(\bar{x})$。若 $\bar{x}$ 是(VP)的 E-超有效解，则 $\exists L>0$，使得 $d_{-E}(y-\bar{y})\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|$，$\forall y\in F(A)$。

证明 因 $\bar{x}\in A$ 是(VP)的 E-超有效解，故 $\forall V\in N(\mathbf{0})$，$\exists U\in N(\mathbf{0})$，使得

$$\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)\subseteq V$$

成立。即 $\exists M>0$，使得 $V=MU$，从而有

$$\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)\subseteq MU \tag{7}$$

上式可等价表示为 $\forall y\in F(A)$，$k\in K$，$e\in E$，有

$$\|y-\bar{y}+e\|\leqslant M\|y+k-\bar{y}+e\| \tag{8}$$

成立。

若(7)不成立，则 $\exists\lambda>0$ 及 $\hat{y}\in F(A)$，$\bar{u}\in U$，$\bar{k}\in K$，$\bar{e}\in E$，使得

$$\lambda(\hat{y}-\bar{y}+\bar{e})=\bar{u}-\bar{k} \tag{9}$$

且

$$\lambda\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}\|>M. \tag{10}$$

由(9)可得 $\|\lambda(\hat{y}-\bar{y}+\bar{e})+\bar{k}\|\leqslant 1$，整理得到

$$\left\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}+\frac{\bar{k}}{\lambda}\right\|\leqslant\frac{1}{\lambda}, \tag{11}$$

再由(10)可知

$$\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}\|>\frac{M}{\lambda} \tag{12}$$

结合(11)、(12)两式，则有

$$\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}\|>\frac{M}{\lambda}\geqslant M\left\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}+\frac{\bar{k}}{\lambda}\right\|, \tag{13}$$

令 $\hat{k}=\frac{\bar{k}}{\lambda}$，由(13)可知(8)不成立。

若(8)不成立，则 $\exists\hat{y}\in F(A)$，$\bar{k}\in K$，$\bar{e}\in E$，使得

$$\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}\|>M\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|. \tag{14}$$

对 $\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|$ 分情况讨论：

(ⅰ)若 $\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|=0$，则有 $\bar{y}=\hat{y}+\bar{k}+\bar{e}$，故

$$\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}\|=\|\hat{y}-(\hat{y}+\bar{k}+\bar{e})+\bar{e}\|=\|-\bar{k}\|.$$

令 $\lambda:=\frac{2M}{\|-\bar{k}\|}$，则有

$$l=\lambda(\hat{y}-\bar{y}+\bar{e})\in\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K),$$

而 $\|l\|=\frac{2M}{\|-\bar{k}\|}\cdot\|-\bar{k}\|=2M>M$，所以(7)不成立。

(ⅱ)若 $\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|\neq 0$，则 $\exists\bar{u}\in U$，使得 $\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}=\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|\bar{u}$，则

$$\begin{aligned}s:&=\frac{\hat{y}-\bar{y}+\bar{e}}{\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|}\\&=\frac{b\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|-\bar{k}}{\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|}\\&=b-\frac{\bar{k}}{\|\hat{y}-\bar{y}+\bar{k}+\bar{e}\|}\\&\in\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K).\end{aligned}$$

由(14)得 $\|s\|>M$，故 $s\notin MU$，因而(7)不成立。

综上可得(7)与(8)等价。

取 $L=\frac{1}{M}$，则有

$$\|y+k-\bar{y}+e\|\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|$$

由于 E 是改进集，故 $\exists e_1\in E$ 满足 $e_1=e+k$，使得

$$\|y-\bar{y}+e_1\|\geqslant L\|y-\bar{y}+e\| \tag{15}$$

成立。对任意的 $y\in F(A)$，上式等价于

$$\begin{aligned}d_{-E}(y-\bar{y})&=\inf_{e_1\in E}\|y-\bar{y}+e_1\|\\&\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|.\end{aligned} \tag{16}$$

结论得证。

定理 4 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集且 $E=E+K_0$。若 $\bar{x}\in A$ 是(VP)的 E-超有效解，$\bar{y}\in F(\bar{x})$，则 $\exists L>0$，使得

$$\Delta_{-E}(y-\bar{y})\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|,\forall y\in F(A)$$

成立。

证明 由于 $E=E+K_0$，结合注 2 注 3 可得 $SE(A,E)\subset O(A,E)$。由注 1 可知，若 $\bar{x}\in A$ 是(VP)的 E-超有效解，则 $\exists\bar{y}\in F(\bar{x})$，使得 $\bar{y}-y\notin E$，$\forall y\in F(A)$，从而 $\Delta_{-E}(y-y_0)=d_{-E}(y-y_0)$。根据定理 3 可知 $\Delta_{-E}(y-\bar{y})\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|$。

结论得证。

定理 5 设 E 是 Y 中关于 K 的改进集，$\bar{x}\in A$，$\bar{y}\in F(\bar{x})$。若 $\exists L>0$，使得

$$d_{-E}(y-\bar{y})\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|,\forall y\in F(A),$$

则 $\bar{x}$ 是(VP)的 E-超有效解。

证明 由距离函数定义可知

$$d_{-E}(y-\bar{y})=\inf_{e_1\in E}\|y-\bar{y}+e_1\|,\forall y\in F(A). \tag{17}$$

又$\exists L>0$,使得$d_{-E}(y-\bar{y})\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|$成立,故(17)式等价于

$$\inf_{e_1\in E}\|y-\bar{y}+e_1\|\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|,$$

即$\|y-\bar{y}+e_1\|\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|,\forall e_1\in E$。

令$M=\frac{1}{L}$,$e_1\in E=E+K$,则$\exists e\in E,k\in K$,满足$e_1=e+k$,则有

$$\|y-\bar{y}+e\|\leqslant M\|y+k-\bar{y}+e\|.$$

根据定理3中(7)与(8)等价,所以有

$$\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)\subseteq MU.$$

取$V=MU$,则有

$$\mathrm{cone}(F(A)-\bar{y}+E)\cap(U-K)\subseteq V,$$

即$\bar{x}\in A$是(VP)的E-超有效解。

结论得证。

由定理3和定理5可得下面的推论2:

推论2 设E是Y中关于K的改进集,$\bar{x}\in A$,$\bar{y}\in F(\bar{x})$。$\bar{x}$是(VP)的E-超有效解当且仅当$\exists L>0$,使得$d_{-E}(y-\bar{y})\geqslant L\|y-\bar{y}+e\|,\forall y\in F(A)$。

定理6 设E是Y中关于K的改进集,$0\in \mathrm{cl}E$,$x_0\in A$是标量化问题(P_{x_0})的一个解,$y_0\in F(x_0)$。若$\exists L>0$,使得

$$\Delta_{-E}(y-y_0)\geqslant L\|y-y_0+e\|,\forall y\in F(A)$$

成立,则$x_0\in A$是(VP)的E-超有效解。

证明 设$x_0\in A$是标量化问题(P_{x_0})的一个解,由引理2可知$x_0\in O(A,E)$。根据注1可得$y_0-y\notin E$,从而$\Delta_{-E}(y-y_0)=d_{-E}(y-y_0)$。又已知$\Delta_{-E}(y-y_0)\geqslant L\|y-y_0+e\|$,则有

$$d_{-E}(y-y_0)\geqslant L\|y-y_0+e\|.$$

由定理5可得,$x_0\in A$是(VP)的E-超有效解。

结论得证。

由定理4和定理6可得如下结论:

推论3 设E是Y中关于K的改进集,$E=E+K_0$,$0\in \mathrm{cl}E$。$x_0\in A$是标量化问题(P_{x_0})的一个解,$y_0\in F(x_0)$。$x_0\in$是(VP)的E-超有效解当且仅当$\exists L>0$,使得

$$\Delta_{-E}(y-y_0)\geqslant L\|y-y_0+e\|,y\in F(A).$$

4 结论

本文利用半范数p和距离函数d的性质对集值向量优化问题的E-超有效解进行非线性标量化刻画,并在$E=E+K_0$的条件下利用E-最优解与E-超有效解之间的关系,进一步得出E-超有效解在基于改进集E的面向距离函数Δ_{-E}刻画下的非线性标量化结果。在本文中基于改进集E的面向距离函数Δ_{-E}相关的结论是在一定的条件下取得的。在没有这些假设条件下,能否得到相同结论是有待进一步研究的问题。例如,能否在没有$E=E+K_0$的条件下直接得到E-最优解与E-超有效解之间的关系。

利益冲突:作者声明无利益冲突。

参考文献(References)

[1] BORWEIN J M, ZHUANG D M. Super efficiency in convex vector optimization[J]. ZOR-Methods and Models of Operations Research, 1991, 35: 175-184. https://dx.doi.org/10.1007/BF01415905

[2] BORWEIN J M, ZHUANG D M. Super efficiency in vector optimization[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 338(1): 105-122. https://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1098432-5

[3] ZHENG X Y. Proper efficiency in locally convex topological vector spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 94(2): 469-486. https://dx.doi.org/10.1023/A:1022648115446

[4] HU Y D, GONG X H. Super efficiency and its scalarization in topological vector space[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000, 16(1): 22-26. https://dx.doi.org/10.1007/BF02670960

[5] RONG W D, MA Y. ε-Properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. OR Transaction, 2000, 4(4): 21-32. https://dx.doi.org/10.3969/j.issn.1007-6093.2000.04.003

[6] XU Y H, LIU S Y. Super efficiency in the nearly cone-subconvexlike vector optimization with set-valued functions[J]. Acta Mathematica Scientia, 2005, 25B(1): 152-160. https://dx.doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30272-2

[7] 余丽. 关于集值优化问题超有效解和强有效解若干问题的研究[D]. 南昌:南昌大学,2007. https://dx.doi.org/10.7666/d.y1238056

[8] 邵建英. 集值向量优化问题ε-超有效解的性质[J]. 应用数学与计算数学学报,2003,17(1):67-72. https://dx.doi.org/10.3969/j.issn.1006-6330.2003.01.011

[9] CHICCO M,MIGNANEGO F,PUSILLO L,et al. Vector optimization problems via improvement sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2011,150(3):516-529.
https://dx.doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

[10] GUTIÉRREZ C,JIMÉNEZ B,NOVO V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research,2012,223(2):304-311.
https://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

[11] ZHAO K Q,YANG X M. E-benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization,2015,64(4):739-752.
https://dx.doi.org/10.1080/02331934.2013.798321

[12] ZHOU Z A,YANG X M,ZHAO K Q. E-super efficiency of set-valued optimization problems involving improvement sets[J]. Journal of Industrial and Management Optimization,2016,12(3):1031-1039.
https://dx.doi.org/10.3934/jimo.2016.12.1031

[13] 林安,刘学文. 向量优化中 E-超有效解的最优性条件[J]. 西南大学学报(自然科学版),2018,40(7):101-105.
https://dx.doi.org/10.13718/j.cnki.xdzk.2018.07.015

[14] 白霞,李飞. 向量优化问题 E-有效解的非线性标量化刻画[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版),2022,53(4):343-350.
https://dx.doi.org/10.13484/j.nmgdxxbzk.20220402

[15] ZAFFARONI A. Degrees of efficiency and degrees of minimality[J]. SIAM Journal on Control and Optimization,2003,42(3):1071-1086.
https://dx.doi.org/10.1137/S0363012902411532

[16] ZHOU Z A,YANG X M. Scalarization of ε-super efficient solutions of set-valued optimization problems in real ordered linear spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2014,162:680-693.
https://dx.doi.org/10.1007/s10957-014-0565-z

[17] 秦晨. 向量优化改善集及 E-最优解的最优性条件[D]. 重庆:重庆大学,2013.
https://dx.doi.org/10.7666/d.D355042

[18] 徐登州,等. 拓扑线性空间[M]. 兰州:兰州大学出版社,1987.

Nonlinear Scalarization Characterizations of E-Super Efficient Solution of Set-valued Vector Optimization Problem

LUO Fengya, LI Fei*

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: In the study of vector optimization problems, the concept of (weakly) effective solution based on the definition of order cone and its properties play a very important role. The concept of superefficient solution is the unification of several existing concept of properly efficient solutions, while the E-super efficient solution of the vector optimization problem proposed based on the improvement set is an important extension of the classical concept of superefficient solution, which unifies the concepts of superefficient solution and ε-super efficient solution. Therefore, it is of great significance to study the E-super efficient solution and its related properties for the study of vector optimization problems. This paper mainly focuses on the relevant conditions of nonlinear scalarization characterization of E-super efficient solution: firstly, a sufficient and necessary condition for the nonlinear scalarization characterization about the E-super efficient solution of the set-valued vector optimization problem is obtained through the corresponding property of the seminorm p; secondly, the corresponding property of the distance function d is used to obtain another sufficient and necessary condition for the nonlinear scalarization characterization of the E-super efficient solution; then, according to the relationship between the E-optimal solution and the E-super efficient solution, a sufficient condition for the results of nonlinear scalarization characterization of the E-super efficient solution is derived by means of the distance-oriented function Δ_{-E} which based on the improved set E under the condition of $E=E+K_0$; finally, under the condition of $\boldsymbol{0} \in \mathrm{cl}E$, the distance-oriented function Δ_{-E} is used to obtain a necessary condition for the nonlinear scalarization result of E-super efficient solution, and the corresponding sufficient and necessary result is deduced.

Keywords: Set-valued vector optimization; improvement set; E-super efficient solution; nonlinear scalarization; seminorm; distance-oriented function

DOI: 10.48014/fcpm.20230420001

Citation: LUO Fengya, LI Fei. Nonlinear scalarization characterizations of E-super efficient solution of set-valued vector optimization problem[J]. Frontiers of Chinese Pure Mathematics, 2023, 1(1): 14-20.